

О РАСЧЕТЕ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В ОБЪЕМЕ ЛИСТА СЕРДЕЧНИКА СТАТОРА ЛИНЕЙНОГО ДВИГАТЕЛЯ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В [1] на примере линейного двигателя предложена математическая модель в виде системы интегральных уравнений относительно комплексных амплитуд плотностей вихревых токов и токов намагниченности, индуцируемых в плоских ферромагнитных проводниках.

Целью настоящей статьи является разработка математической модели трехмерного электромагнитного поля в среде с массивными ферромагнитными проводниками и применение данной модели к расчету вихревых токов в объеме листа сердечника статора линейного двигателя.

ВЫВОД СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему n ферромагнитных проводников, изолированных друг от друга и расположенных в переменном магнитном поле. Будем считать, что магнитные проницаемости материалов ферромагнитных проводников не зависят от магнитного поля, а окружающее их пространство не обладает магнитными и электрическими свойствами. В объемах рассматриваемых проводников индуцируются токи проводимости $\vec{\delta}$ и токи намагниченности $\vec{\delta}_H$. Как показано в [1], суммарная плотность тока в объеме k -го ферромагнитного проводника с магнитной проницаемостью μ_k пропорциональна плотности тока проводимости:

$$\vec{\delta} + \vec{\delta}_H = (\mu_k / \mu_0) \vec{\delta}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Запишем выражение для векторного потенциала, создаваемого всеми источниками магнитного поля, в объеме r -го ферромагнитного проводника V_r :

$$\vec{A}_r(M, t) = \vec{A}_0(M, t) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{V_k} \frac{\vec{\delta}(N, t)}{r_{MN}} dV_N + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^n \iint_{S_k} \frac{\vec{j}(P, t)}{r_{MP}} dS_P, \quad (2)$$

где $M \in V_r$, $N \in V_k$, $P \in S_k$ (S_k - замкнутые поверхности, ограничивающие объемы V_k), r , $k = 1, 2, \dots, n$; $\vec{A}_0(M, t)$ - мгновенное значение векторного потенциала первичного магнитного поля; μ_k - значение магнитной проницаемости k -го ферромагнитного проводника; r_{MN} и r_{MP} - расстояния между точками M и N , и точками M и P соответственно; $\vec{j}(P, t)$ - мгновенное значение плотности тока намагниченности на поверхности k -го ферромагнитного проводника.

Из закона Ома в дифференциальной форме и выражения напряженности электрического поля \vec{E} через электродинамические потенциалы \vec{A} и φ может быть получено следующее уравнение:

$$\vec{\delta}(M, t) + \frac{\gamma_r}{4\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{V_k} \frac{\partial \vec{\delta}(N, t)}{\partial t} \frac{dV_N}{r_{MN}} =$$

$$= -\gamma_r \frac{\partial \vec{A}_0(M, t)}{\partial t} - \frac{\gamma_r \mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^n \oint_{S_k} \frac{\partial \vec{j}(P, t)}{\partial t} \frac{dS_P}{r_{MP}} - \gamma_r \text{grad} \varphi_r(M, t), \quad (3)$$

где γ_r - удельная электрическая проводимость r -го проводника.

Для отыскания скалярного электрического потенциала $\varphi(M, t)$ необходимо составить и решить краевую задачу, граничные условия для которой вытекают из требования равенства нулю нормальной компоненты вектора плотности вихревых токов на границах проводников: $\delta_n(Q, t) = 0$ ($Q \in S_r$). Данная краевая задача сводится к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} & \sigma(Q, t) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \oint_{S_k} \sigma(P, t) \frac{(\vec{r}_{PQ}, \vec{n}_Q)}{r_{PQ}^3} dS_P = \\ & = -\frac{\varepsilon_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\vec{\delta}(N, t) \vec{n}_Q}{r_{QN}} dV_N - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \oint_{S_k} \frac{\vec{j}(P, t) \vec{n}_Q}{r_{QP}} dS_P - 2\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}_0(Q, t), \vec{n}_Q), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sigma(Q, t)$ - мгновенное значение плотности простого слоя электрических зарядов.

Выражение для $-\gamma_r \text{grad} \varphi_r(M, t)$, входящее в уравнение (3), вычисляется по формуле:

$$-\gamma_r \text{grad} \varphi_r(M, t) = \frac{\gamma_r}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^n \oint_{S_k} \sigma(P, t) \frac{\vec{r}_{PM}}{r_{PM}^3} dS_P.$$

Подставляя последнее выражение в (3), получим второе интегро-дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} & \vec{\delta}(M, t) + \frac{\gamma_r}{4\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{V_k} \frac{\partial \vec{\delta}(N, t)}{\partial t} \frac{dV_N}{r_{MN}} = \\ & = -\gamma_r \frac{\partial \vec{A}_0(M, t)}{\partial t} - \frac{\gamma_r \mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^n \oint_{S_k} \frac{\partial \vec{j}(P, t)}{\partial t} \frac{dS_P}{r_{MP}} + \frac{\gamma_r}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^n \oint_{S_k} \sigma(P, t) \frac{\vec{r}_{PM}}{r_{PM}^3} dS_P. \end{aligned} \quad (5)$$

Последнее уравнение, связывающее плотности токов проводимости, электрических зарядов и токов намагниченности, может быть получено из граничного условия: $[\vec{n}_Q, \vec{B}^+(Q)]/\mu^+ = [\vec{n}_Q, \vec{B}^-(Q)]/\mu^-$, где \vec{n}_Q - единичная нормаль, направленная во внешность проводника; μ^+ и μ^- - значения магнитных проницаемостей внутренней и внешней областей соответственно; $\vec{B}^+(Q)$ и $\vec{B}^-(Q)$ - предельные значения индукции магнитного поля в точке $Q \in S_r$ ($r = 1, 2, \dots, n$).

Искомое интегральное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} & \vec{j}(Q, t) - \frac{\mu^- - \mu^+}{\mu^- + \mu^+} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \oint_{S_k} \frac{[\vec{j}(P, t), \vec{r}_{PQ}], \vec{n}_Q}{r_{PQ}^3} dS_P = \\ & = \frac{\mu^- - \mu^+}{\mu_0(\mu^- + \mu^+)} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{V_k} \frac{[\vec{\delta}(N, t), \vec{r}_{NQ}], \vec{n}_Q}{r_{NQ}^3} dV_N + \frac{2(\mu^- - \mu^+)}{\mu_0(\mu^- + \mu^+)} [\vec{B}_0(Q, t), \vec{n}_Q]. \end{aligned} \quad (6)$$

Особенностью полученной здесь системы интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ) является то, что в нее входит три, а не четыре (как, например, в [2]) неизвестные функции, благодаря использованию соотношения (1).

ОРГАНИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ
РЕШЕНИЯ СИДУ (4)-(6)

Рассмотрим итерационную процедуру, в ходе которой решается СИДУ (4)-(6).

Период колебаний T разбивается на N_T в общем случае неравных интервалов времени. Мгновенные значения искомым плотностей токов и зарядов для каждого интервала времени обозначим следующим образом: $\delta(M, t_i) = \delta_i(M)$, $j(Q, t_i) = j_i(Q)$, $\sigma(Q, t_i) = \sigma_i(Q)$ ($i = 0, 1, \dots, N_T$).

Соответствующая итерационная схема для решения СИДУ (4)-(6) имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{j}_i^{(s)}(Q) - \frac{\mu^- - \mu^+}{\mu^- + \mu^+} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \oint_{S_k} \frac{[\vec{j}_i^{(s)}(P), \vec{r}_{PQ}], \vec{n}_Q}{r_{PQ}^3} dS_P = \\ = \frac{\mu^- - \mu^+}{\mu_0(\mu^- + \mu^+)} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{V_k} \frac{[\vec{\delta}_i^{(s-1)}(N), \vec{r}_{NQ}], \vec{n}_Q}{r_{NQ}^3} dV_N + \frac{2(\mu^- - \mu^+)}{\mu_0(\mu^- + \mu^+)} [\vec{B}_0(Q, t_i), \vec{n}_Q]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(s)}(Q) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \oint_{S_k} \sigma_i^{(s)}(P) \frac{(\vec{r}_{PQ}, \vec{n}_Q)}{r_{PQ}^3} dS_P = \\ = -\frac{\varepsilon_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_k} \frac{\vec{\delta}_i^{(s-1)}(N) \vec{n}_Q}{r_{QN}} dV_N - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \oint_{S_k} \frac{\vec{j}_i^{(s)}(P) \vec{n}_Q}{r_{QP}} dS_P - 2\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}_0(Q, t_i), \vec{n}_Q); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_i^{(s)}(M) = -\frac{\gamma_r}{4\pi} \sum_{k=1}^n \mu_k \int_{V_k} \frac{\partial \vec{\delta}_i^{(s-1)}(N)}{\partial t} \frac{dV_N}{r_{MN}} - \frac{\gamma_r \mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^n \oint_{S_k} \frac{\partial \vec{j}_i^{(s)}(P)}{\partial t} \frac{dS_P}{r_{MP}} + \\ + \frac{\gamma_r}{4\pi \varepsilon_0} \sum_{k=1}^n \oint_{S_k} \sigma_i^{(s)}(P) \frac{\vec{r}_{PM}}{r_{PM}^3} dS_P - \gamma_r \frac{\partial \vec{A}_0(M, t_i)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (7)-(9) индекс s в скобках означает номер итерации.

Порядок выполнения итерационной процедуры следующий:

1. Задается начальное приближение для плотности вихревых токов, равное $\vec{\delta}_i^{(0)}(M) = -\gamma_r \partial \vec{A}_0(M, t_i) / \partial t$ ($i = 0, 1, \dots, N_T$).

2. Решаются уравнения (7) и (8) и находятся таким образом первые приближения для функций $\vec{j}_i^{(1)}(Q)$ и $\sigma_i^{(1)}(Q)$ ($i = 0, 1, \dots, N_T$).

3. Имеющиеся значения $\vec{\delta}_i^{(0)}(M)$, $\vec{j}_i^{(1)}(Q)$ и $\sigma_i^{(1)}(Q)$ подставляются в правую часть формулы (9). После осуществления всех вычислений определяется функция $\tilde{\delta}_i^{(s)}(M)$ ($i = 0, 1, \dots, N_T$).

4. По формуле $\vec{\delta}_i^{(1)} = \vec{\delta}_i^{(0)} + \beta(\tilde{\delta}_i^{(1)} - \vec{\delta}_i^{(0)})$ вычисляется новое приближение для $\vec{\delta}_i^{(1)}(M)$ ($i = 0, 1, \dots, N_T$), где β выбирается в интервале (0;1), исходя из численного эксперимента. Подбор оптимального значения коэффициента β обеспечивает монотонную сходимость процесса, даже если при $\beta = 1$, этот процесс расходился.

На этом заканчивается первая итерация. Далее процесс переходит к пункту 2 и совершается вторая итерация и т. д.

5. Итерационный процесс прерывается после выполнения условия: $\|\tilde{\delta}^{(s)}(M, t) - \delta^{(s-1)}(M, t)\| / \|\tilde{\delta}^{(s)}(M, t)\| 100 \leq \varepsilon$, где ε - заданное малое число;

$$\|\delta^{(s)}(M, t)\| = \sqrt{\int_0^T \int_{S_0} (\delta^{(s)}(M, t))^2 dt dS} \quad (S - \text{площадка, пересекаемая током}).$$

Для вычисления производных, входящих в (7)-(9), целесообразно применять первую формулу Рунге.

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕДЛОЖЕННОГО АЛГОРИТМА К РАСЧЕТУ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В ОБЪЕМЕ ЛИСТА СЕРДЕЧНИКА СТАТОРА ЛИНЕЙНОГО ДВИГАТЕЛЯ

В качестве примера была решена задача расчета вихревых токов в уединенном стальном листе статорного пакета линейного двигателя. Лист имел форму параллелепипеда. Исследовалось влияние на лист катушки возбуждения, содержащей 70 витков прямоугольной формы с размерами 65×26 мм. Толщина листа составила 0,5 мм, его ширина - 7,45 мм, длина - 28 мм. Относительная магнитная проницаемость стали бралась равной 1000, удельная электрическая проводимость - 1 МСм/м. Ток, протекающий по катушке, изменялся во времени по синусоидальному закону. Амплитуда тока полагалась равной 3 А.

При расчете поверхность листа разбивалась на прямоугольные элементы. При этом для аппроксимации уравнений (7) и (8) задавались разные сетки: в первом случае общее число элементов разбиения составило 880, во втором — 520. Объем листа был разбит на 1600 элементов в форме параллелепипедов. Период разбивался на 25 моментов времени. Коэффициент β , используемый в четвертом пункте итерационного процесса, выбирался равным 0,5.

На рисунке приведена зависимость, характеризующая сходимость построенного итерационного процесса.

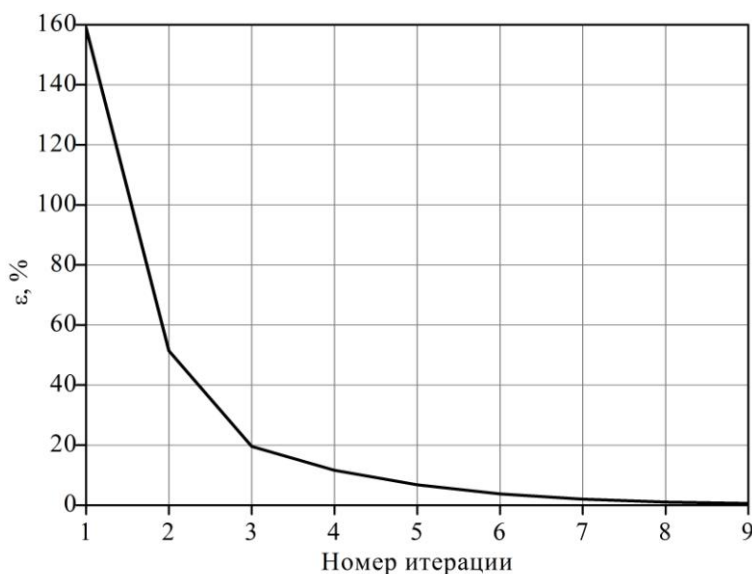


Рисунок. График сходимости итерационного процесса

Как видно по рис., предложенный итерационный процесс сходится монотонно, затрачивая при этом весьма небольшое количество итераций.

Список использованных источников

1. Стадник И. П., Филиппов Д. М. Метод интегральных уравнений для расчета вихревых токов в движущихся протяженных ферромагнитных проводниках с иллюстрацией на линейном асинхронном электродвигателе // Техническая электродинамика. - 2010. - № 3. - С. 14–20.

2. Петрушенко Е. И. К расчету вихревых токов в проводниках сложной формы // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. - 1966. - № 6. - С. 59–70.